Tentamen Functionaalanalyse, 2009–2010

Datum : 05-07-2010, 9.00–12.00 uur.

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Definieer voor elke f in de lineaire ruimte $C^1([0,1])$ (de ruimte van continu-differentieerbare functies op $[0,1]$)

$$||f||_a := ||f||_\infty + ||\frac{df}{dx}||_\infty + |x(0)|$$

   (a) Bewijs dat $||\cdot||_a$ een norm definieert op $C^1([0,1])$.

   (b) Definieer de alternatieve norm

$$||f||_b := ||f||_\infty + ||\frac{df}{dx}||_\infty$$

   Toon aan dat de normen $||\cdot||_a$ en $||\cdot||_b$ equivalent zijn. (Zie Vraagstuk 2.3.2.)

   (c) Toon aan dat de differentiatie-operator $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ gedefinieerd als

$$Tf(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

   begrensd is met betrekking tot de norm $||\cdot||_b$ op $C^1([0,1])$ en de standaard norm $||\cdot||_\infty$ op $C([0,1])$. Wat is $||T||$?

2. Beschouw de reële functies $f \in L^p(\mathbb{R})$ en $g \in L^q(\mathbb{R})$, met p, q natuurlijke getallen die voldoen aan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definieer de convolutie van f en g als de reële functie

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

   (a) Toon aan dat

$$||f \star g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

   (b) Neem $f \in L^p(\mathbb{R})$. Toon aan dat de afbeelding $T_f : L^q(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$T_f g = f \star g$$

   een begrensde lineaire operator is.

3. Zij H een reële Hilbertruimte met inprodukt $< \cdot, \cdot >$. Zij K een gesloten deelruimte van H. Definiëer voor iedere $x \in H$ de projectie-operator P_K als $y = P_K x$, met y het unieke punt in K waarvoor $x = y + z$ met $z \in K^\perp$.

(a) Toon aan dat P_K Hermitisch is.

(b) Toon aan dat $< P_K x, x >= ||P_K x||^2$.

(c) Zij $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ een eindig orthonormaal stelsel in H. Bewijs dat de lineaire ruimte $\hat{K}$ opgespannen door $f_1, f_2, \dots, f_n$ een gesloten deelruimte is.

(d) Zij $x \in H$. Laat zien dat het beeld van x onder de projectie-operator $P_{\hat{K}}$ gegeven wordt door de eindige Fouriersom

$$P_{\hat{K}} x = \sum_{k=1}^{n} < x, f_k > f_k$$

Laat zien dat

$$\min_{c_1, \cdots, c_n} ||x - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k|| = ||x - P_{\hat{K}} x||^2$$

4. Beschouw de operator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ gegeven door

$$Tf(t) = \int_0^1 (t+s) f(s) ds$$

(a) Toon aan dat $||T|| = \frac{3}{2}$. (De norm op $C([0,1])$ is de standaard supremum-norm $|| \cdot ||_\infty$.)

(b) Toon aan dat de integraalvergelijking

$$3f(t) = \int_0^1 (t+s) f(s) ds + g(t)$$

voor gegeven $g \in C([0,1])$ een unieke oplossing $f \in C([0,1])$ heeft.

(c) Beschouw nu de operator T met zelfde definitie als boven maar als een operator van $L^2([0,1])$ naar $L^2([0,1])$. Wat is de norm van T in dit geval ? Heeft de bovenstaande integraalvergelijking nog steeds een unieke oplossing ?

(d) Bepaal de eigenwaarden van T.

Puntenverdeling:

1. a: 10, b: 5, c: 10.

2. a: 10, b: 5.

3. a: 5, b: 5, c: 5, d: 10.

4. a: 10, b: 5, c: 5, d: 5.

Gratis: 10 Totaal: 100

X

Tentamen Functionaalanalyse 5 juli 2010

1 a i) $\|f\|_\infty \geq 0$ ⊛
$\|\frac{df}{dx}\|_\infty \geq 0$ ⊛
$|x(0)| \geq 0$

$\left.\right\} \|f\|_a \geq 0$

ii) als $\|f\|_a = 0$ ⊛ dan $\|f\|_\infty = 0$ $\|\frac{df}{dx}\|_\infty = 0$ en $x(0) = 0$
$f = 0$ dus $f = 0$

iii) $\|\lambda f\|_a = \|\lambda f\|_\infty + \|\frac{\partial \lambda f}{\partial x}\|_\infty + |\lambda x(0)|$
$\overset{⊛}{=} |\lambda| \|f\|_\infty + \|\lambda \frac{\partial f}{\partial x}\|_\infty + |\lambda||x(0)|$
$\overset{⊛}{=} |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_\infty + |\lambda||x(0)| = \lambda \|f\|_a$

iv) $\|f+g\|_a = \|f+g\|_\infty + \|\frac{\partial}{\partial x}(f+g)\|_\infty + |x(0)|$
$\leq \|f+g\|_\infty + \|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\|_\infty + |x(0)| + |x(0)|$
$\overset{⊛}{\leq} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_\infty + \|\frac{\partial g}{\partial x}\|_\infty + |x(0)| + |x(0)|$
$= \|f\|_a + \|g\|_a$

⊛: $\|\cdot\|_\infty$ is een norm, dus voldoet aan de 4 voorwaarden

b 2 normen zijn equivalent als
$a\|x\| \leq |||x||| \leq b\|x\|$ $\forall x$ in lineaire ruimte, $a, b > 0$
$\|f\|_b \leq \|f\|_a$ want $\|f\|_b + |x(0)| = \|f\|_a$

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$

Ik neem aan dat met $x(0)$ $f(0)$ bedoeld wordt want anders geldt op $[0,1]$: $x(0) = 0$, wat het wel heel simpel maakt (dan $\|f\|_b = \|f\|_a$),
$|f(0)| \leq \|f\|_\infty$
$2\|f\|_b = 2\|f\|_\infty + 2\|\frac{df}{dx}\|_\infty \geq \|f(a)$
dus equiv. normen

c T begrensd als $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_b$ pgs
$\|Tf(x)\| = \sup\{|Tf(x)| \mid x \in [0,1]\}$
$= \sup\{|\frac{df}{dx}(x)| \mid x \in [0,1]\} = \|\frac{df}{dx}\|_\infty \leq \|f\|_b$
(via definitie $\|f\|_b$)

$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_b} \mid \|f\|_\infty \right\} = 1$

$= \sup \frac{\|f_x\|_\infty}{\|f_x\|_\infty + \|f\|_\infty}$

~~$\|T\| = \sup\{\|Tf\|_\infty \mid \|f\|_b \leq 1\}$~~

$\|T\| = \inf \{M \mid \|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_b\} = 1$ 2e ~~aa~~ boven

stel neem $M \leq 1$ ~~dan~~

$\rightarrow$ $\|Tf\| \overset{(1)}{\leq} M\|f\|_b \leq M\|Tf\|_\infty + M\|f\|_\infty$

2a $\|f * g\|_\infty = \| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$

te bew $\|f * g\|_\infty = \|f * g\|$, dan mbv hölder ong. klaar

b

3a $\langle x_1, x_2 \rangle =$

b $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^2 x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$ ~~Cauchy Schwarz~~ def v.e. operatornorm

$Tx = y \quad T^2 x = Ty = y$

c deelruimte: $0 \in \hat{K}$

als $x_1, x_2 \in \hat{K}$ $\quad x_1 = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$

$x_2 = b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n$

dan $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(a_1 f_1 + \ldots a_n f_n) + \beta(b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n) = (\alpha a_1 + \beta b_1) f_1 + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n) f_n \in \hat{K}$

dus $\hat{K}$ deelruimte

~~$\hat{K}$ gesloten want als~~ $\hat{K}$ gesloten want als

$x_1, x_2 \in \hat{K}$ dan $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \hat{K}$

d ~~[illegible]~~

4 ~~$\|f\|_\infty =$~~

$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \;\middle|\; f \neq 0 \right\} = 1\frac{1}{2}$

$= \sup \{ \| \int_0^1 (t+s) f(s)\, ds \|_\infty \mid \|f\|_\infty \leq 1 \}$

$\| \int_0^1 (t+s) f(s)\, ds \|_\infty = \| \int_0^1 t f(s) + s f(s)\, ds \|_\infty$

$\| t \int_0^1 f(s)\, ds + \int_0^1 s f(s)\, ds \|_\infty$

$\leq t \|f\|_\infty \int_0^1 ds + \|f\|_\infty \int_0^1 s\, ds \|_\infty$

$= \|f\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty = 1\frac{1}{2} \|f\|_\infty$

b Stel 2 opl f_1, f_2

dan $3 f_1(t) = \int_0^1 (t+s) f_1(s)\, ds + g(t)$

$3 f_2(t) = \int_0^1 (t+s) f_2(s)\, ds + g(t)$

$3(f_1(t) - f_2(t)) = \int_0^1 (t+s) (f_1(s) - f_2(s))\, ds$

$3 \| \;\; \| \leq \int_0^1 |t+s| \; \| f \| \, ds$ noem nemen

$3 \leq$ ~~[illegible]~~ $1\frac{1}{2}$ tegenspraak

dus 2 opl niet mogelijk

als $\|g\| = \frac{3}{2}$ dan opl. , dus g bestaat

c $\int_0^1 |f|^2\, dx < \infty$

d $Tf = \lambda f$

Tentamen Functionaalanalyse 5 juli 2010

1a $\|\cdot\|_\infty$ is een NORM dus voldoet al aan de 4 voorwaarden van een norm

i) $\|f\|_\infty \geq 0$ ($\|\cdot\|_\infty \geq 0$)
$\|\frac{df}{dx}\|_\infty \geq 0$ "
$|x(0)| \geq 0$
} $\|f\|_a \geq 0$

ii) als $\|f\|_a = 0$ dan: $\|a\|_\infty = 0 \Leftrightarrow a = 0$
$\|f\|_\infty = 0 \longrightarrow f = 0$ ($\|\cdot\|_\infty$ is een norm)
$\|\frac{df}{dx}\|_\infty = 0$
$|x(0)| = 0$

iii) $\|\lambda f\|_a = \|\lambda f\|_\infty + \|\frac{d\lambda f}{dx}\|_\infty + |\lambda x(0)|$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
$= |\lambda| \|f\|_\infty + \|\lambda \frac{df}{dx}\|_\infty + |\lambda||x(0)|$
$= |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \|\frac{df}{dx}\|_\infty + |\lambda| |x(0)| = |\lambda| \|f\|_a$

iv) $\|f+g\|_a = \|f+g\|_\infty + \|\frac{d(f+g)}{dx}\|_\infty + |x(0)|$
$\leq \|f+g\|_\infty + \|\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}\|_\infty + 2|x(0)|$
$\|\cdot\|_\infty$ is ~~cauchy~~ een norm $\leadsto \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|\frac{df}{dx}\|_\infty + \|\frac{dg}{dx}\|_\infty + 2|x(0)|$
$= \|f\|_a + \|g\|_a$

b 2 normen $\|\cdot\|$ en $|||\cdot|||$ zijn equivalent als
$a\|x\| \leq |||x||| \leq b\|x\|$ $x \in$ lineaire ruimte, $a, b > 0$
$\|f\|_b + |x(0)| = \|f\|_a$ dus $\|f\|_b \leq \|f\|_a$.

Ik neem aan dat met $x(0)$ $f(0)$ bedoeld wordt want anders geldt op $[0,1]$: $x(0) = 0$ en dan $\|f\|_b = \|f\|_a$ wat het wel heel simpel maakt.

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$
dus $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$
$\|f\|_a \leq \|f\|_b + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_b$
Dus: $\|f\|_b \leq \|f\|_a \leq 2\|f\|_b$ en dus zijn $\|\cdot\|_a$ en $\|\cdot\|_b$ equivalent

c T begrensd als $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_b$

$: \sup \{ |\frac{df}{dx}| \mid x \in [0,1] \} = \|\frac{df}{dx}\|_\infty \leq \|f\|_b = \|f\|_\infty + \|\frac{df}{dx}\|_\infty$

~~Via definitie geef $\|f\|_b$~~

~~$\|T\| = \inf\{M \mid \|Tx\|$~~

$\|T\| = \inf\{ M \mid \|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_b \} = 1$

waarom ??

~~Stel $M < 1$~~

~~neem $f(x) = x^M$~~

~~$\|Tf\|_\infty = \|M x^{M-1}\|_\infty = M$~~

~~$\|f\|_b = \|x^M\|_\infty + \|\frac{df}{dx}\|_\infty = 1 + M$~~

2a $\|f * g\|_\infty = \|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy\|_\infty$

$= \sup\{ |\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy| \mid x \in \mathbb{R} \}$

als $\|f*g\|_1 \geq \|f*g\|_\infty$ dan klaar (Hölders ongelijkheid)

b T lin operator

$T_f(\alpha g_1 + \beta g_2) = f * (\alpha g_1 + \beta g_2) = f * \alpha g_1 + f * \beta g_2$

$= \alpha f * g_1 + \beta f * g_2 = \alpha T_f g_1 + \beta T_f g_2$

Waar α, β constantes $g, f \in L^q(\mathbb{R})$

T begrensd als

$\|T_f g\|_\infty \leq M \|g\|_q$

Dit is het geval want neem $M = \|f\|_p$ (zie a)

3a $\forall x_1, x_2 \in H$: P_K hermitisch als $\langle P_K x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, P_K x_2 \rangle$

$\langle P_K x_1, x_2 \rangle = \langle P_K (y_1 + z_1), y_2 + z_2 \rangle$

$= \langle P_K y_1, y_2 \rangle + \langle P_K y_1, z_2 \rangle + \langle P_K z_1, y_1 \rangle + \langle P_K z_1, z_2 \rangle$

$= \langle y_1, y_2 \rangle + \underbrace{\langle y_1, z_2 \rangle}_{=0 \text{ want } y_1 \in K,\ z_2 \in K^\perp} + \langle 0, y_1 \rangle + \langle 0, z_2 \rangle$

$= \langle y_1, y_2 \rangle$

$= \langle y_1, P_K y_2 \rangle = \langle y_1, P_K y_2 \rangle + \langle y_1, \overbrace{P_K z_2}^{=0} \rangle + \langle z_1, \overbrace{P_K z_2}^{=0} \rangle$

b ~~$P_k x, x A$~~ $P_K x = y$ $\quad P_K(P_K x) = P_K y = y$

$\langle P_K x, x\rangle = \langle P_K(P_K x), x\rangle \underset{\uparrow}{=} \langle P_K x, P_K x\rangle = \|P_K x\|^2$

P_K hermitisch

8

c $\hat{K}$ deelruimte:

$0 \in \hat{K}$

als $x_I, x_{II} \in \hat{K}$ $\qquad x_I = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$

$\boxed{f_i = x_i \quad \forall i = 1, \dots, n}$ $\qquad x_{II} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$

dan $\alpha x_I + \beta x_{II} = \alpha(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) + \beta(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)$

$= (\alpha a_1 + \beta b_1) x_1 + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n) x_n \in \hat{K}$

Dus $\hat{K}$ is een lineaire deelruimte

~~dus~~ $\hat{K}$ is gesloten want als $x_I, x_{II} \in \hat{K}$ dan ?

is elke lineaire combinatie van x_I, x_{II} ook

bevat in $\hat{K}$

d $x = \sum_{k=1}^{\hat{n}} f_k (y_k + z_k)$?

$P_{\hat{K}} x = P_{\hat{K}} \sum_{k=1}^{\hat{n}} f_k (y_k + z_k) = \sum_{k=1}^{\hat{n}} f_k\, y_k$

$\langle x, f_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{\hat{n}} y_i + z_i, f_k\rangle = \langle y_k + z_k, f_k\rangle = \langle \underset{\in \hat{K}}{y_k}, f_k\rangle + \langle \underset{\in \hat{K}^{\perp}}{z_k}, f_k\rangle$

$= \langle y_k, f_k\rangle = y_k$ ~~...~~

$P_{\hat{K}} x = \sum_{k=1}^{\hat{n}} f_k\, y_k = \sum_{k=1}^{\hat{n}} \langle x, f_k\rangle f_k$?

$\min_{c_1,\dots,c_n} \|x - \sum_{k=1}^{\hat{n}} c_k f_k\| = \min_{c_1,\dots,c_k}$

4a $\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \;\middle|\; f \neq 0 \right\} = \frac{3}{2}$

$\sup \|Tf\|_\infty = \|\int_0^1 (t+s) f(s)\, ds\|_\infty = \|\int_0^1 (tf(s) + sf(s)) ds\|_\infty$

$= \sup_t \{\int_0^1 t f(s)\, ds\} + \sup_t \{\int_0^1 s f(s)\, ds\}$

$= \int_0^1 f(s)\, ds + \int_0^1 s f(s)\, ds$

$\leq \|f\|_\infty \int_0^1 ds + \|f\|_\infty \int_0^1 s\, ds = \frac{1}{2}s^2|_0^1$

$= \|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f\|_\infty = \frac{3}{2}\|f\|_\infty$

gelijkheid geldt bij $\|f\|_\infty = 1$ dus een kleinere M zodat $\|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$ is niet te vinden.

~~b) $\|3f(t)\|_\infty = 3\|f(t)\|_\infty = \|\int_0^1 (t+s) f(s)\, ds + g(t)\|_\infty$~~
~~$\leq \|$~~

~~$3f(t) - g(t) = \int_0^1 (t+s) f(s)\, ds$~~

~~$\|3f(t) - g(t)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\|f\|_\infty + 0$~~

~~$\|3f(t) - g(t)\|_\infty \leq \|3f(t)\|_\infty + \|g(t)\|_\infty$~~

b $\|3f(t)\|_\infty = \|\int_0^1 (t+s) f(s)\, ds + g(t)\|_\infty$

$= 3\|f(t)\|_\infty \leq \|\int_0^1 (t+s) f(s)\, ds\|_\infty + \|g(t)\|_\infty$

$\leq$ ~~$3\|f(t)\|_\infty$~~ $= \frac{3}{2}\|f\|_\infty + \|g(t)\|_\infty$

?

Dus $\|g(t)\|_\infty \geq \frac{3}{2}\|f\|_\infty$

Dus voor gegeven $g(t)$ bestaat zo'n $f(t)$

Stel er zijn 2 oplossingen $f_1(t)$ en $f_2(t)$

Dan $3f_1(t) = \int_0^1 (t+s) f_1(s)\, ds + g(t)$

$3f_2(t) = \int_0^1 (t+s) f_2(s)\, ds + g(t)$

$3(f_1(t) - f_2(t)) = \int_0^1 (t+s)(f_1(s) - f_2(s))\, ds$

$3\|f_1(t) - f_2(t)\|_\infty = \|\int_0^1 (t+s)(f_1(s) - f_2(s)) ds\|_\infty$

zie 4a $\leq \frac{3}{2}\|f_1(t) - f_2(t)\|_\infty$

~~tegenspraak tenzij~~ niet mogelijk tenzij:

$f_1(t) = f_2(t)$ dus unieke oplossing

4c ~~Tentamen~~ Functionaalanalyse 5 juli 2010

$$\|Tf\|_2 = \left(\int_0^1 \left| \int_0^1 (t+s) f(s)\, ds \right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t+s) f(s)|^2 ds\, dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 \int_0^1 (t^2 + 2st + s^2)|f^2(s)|\, ds\, dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 t^2 \int_0^1 |f^2(s)|\, ds + t \int_0^1 |s f^2(s)|\, ds + \int_0^1 |s^2 f^2(s)\, ds|\, dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_0^1 t^2 \|f\|_2^2 \int_0^1 ds + t\|f\|_2^2 \int_0^1 s\, ds + \|f\|_2^2 \int_0^1 s^2\, ds\, dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 \|f\|_2^2 \left(t^2 + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}\right) dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \|f\|_2 \left(\int_0^1 t^2 + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}\, dt\right)^{1/2}$$

$$= \|f\|_2 \quad + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{12} \|f\|_2$$

Dus $\|T\| = \frac{11}{12} = \sup\left\{ \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} \,\middle|\, f \neq 0 \right\}$

~~neem $f=1$ $\left(\int_0^1 \left|\int_0^1 (t+s)\, f(s)\, ds\right|^2 dt\right)^{1/2}$~~

~~$= \left|\left(\int_0^1 \left(st + \tfrac{1}{2}s^2 \Big|_0^1\right)^2 dt\right)^{1/2}\right|$~~

~~$= \int_0^1 t + \tfrac{1}{2}\, dt = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$~~

~~Da~~

d $Tf = \lambda f$ ~~...~~ $= \int_0^1 (t+s)\, f(s)\, ds = t\int_0^1 f(s)\, ds + \int_0^1 s f(s)\, ds$

Dus f is vd vorm $at + b$

~~probeer $f = s^n$~~

~~$Tf = \int_0^1 (t+s)\, s^n\, ds = \int_0^1 t\, s^n\, ds + \int_0^1 s^{n+1}\, ds$~~

$Tf = \int_0^1 (t+s)(as+b)\, ds = at\int_0^1 s\, ds + a\int_0^1 s^2\, ds$

~~$+ \frac{1}{2}at + \frac{1}{3}a + b\int_0^1 (t+s)\, ds$~~

$= \frac{1}{2}at + \frac{1}{3}a + bt + \frac{1}{2}b$

$= \left(\frac{1}{2}a + b\right) t + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right) = \lambda(at + b)$

~~$a = \frac{1}{2}a + b \to b = \frac{1}{2}a$~~

~~$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = b = \frac{1}{2}a$~~

~~$\frac{1}{3}a = \frac{1}{2}b = \frac{1}{6}a$~~

$a = \frac{1}{2}a + b \to \frac{1}{2}a = b$

$b = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$

$b = \frac{1}{2}a \quad \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a = \frac{7}{12}a \quad \frac{1}{12}a$ ...

Dus eignwaarde $\lambda = 0$ met $f = 0$ en verder geen

c $\|3 f(t)\|_2 = \| \int_0^1 (t+s) f(s)\, ds + g(t) \|_2$

$= 3\|f(t)\|_2 \leq \| \int_0^1 (t+s) f(s)\, ds \|_2 + \|g(t)\|_2$

$= \frac{11}{12} \|f\|_2 + \|g(t)\|_2$

Dus ~~dagoter~~ $\|g(t)\|_2 = 2\frac{1}{12} \|f(t)\|_2$

Voor gegeven $g(t)$ bestaat zo'n $f(t)$

Stel er zijn twee oplossingen $f_1(t)$ en $f_2(t)$

$3(f_1(t) - f_2(t)) = \int_0^1 (t+s)(f_1(s) - f_2(s))\, ds$

$3\|f_1(t) - f_2(t)\|_2 = \| \int_0^1 (t+s)(f_1(s) - f_2(s))\, ds \|_2$

$\leq \frac{11}{12} \|f_1(t) - f_2(t)\|_2$

zie hier voor

niet mogelijk tenzij $f_1(t) = f_2(t)$ dus unieke oplossing.

2^a $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ gegeven uit voorwaarden $\|\cdot\|_\infty$

$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$\|f*g\|_\infty \leq \|f * g\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \|f\|_p \|g\|_q$

~~$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$~~

als nu $\|f*g\|_1 \geq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ dan klaar

$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)\, g(y)|\, dy$

$\cancel{L^2[0,1] : \|f\|_2 = \int_0^1 |f|^2 ds < \infty}$

$\|Tf\|_2 = \|\int_0^1 (t+s) f(s) ds\|_2 = \|\int_0^1 t f(s) ds + \int_0^1 s f(s) ds\|_2$

$\le \|\int_0^1 t f(s) ds\|_2 + \|\int_0^1 s f(s) ds\|_2$

$\le t\|f\|_2 \int_0^1 ds + \|f\|_2 \int_0^1 s\, ds$

$= t\|f\|_2 + \frac{1}{2}\|f\|_2$

$= (t + \frac{1}{2})\|f\|_2$

$\cancel{\|Tf\|_2 = \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 (t+s) f(s) ds\right|^2 dt\right)^{1/2}}$

$\cancel{= \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 t f(s) ds + \int_0^1 s f(s) ds\right|^2 dt\right)^{1/2}}$

$\cancel{\le \int_0^1 (t \int_0^1 f(s)}$

$\cancel{\le \int_0^1 t^2 + 2st + s^2 f(s) ds}$